Problemas propuestos

14. Hallar en qué puntos de la curva $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ la tangente es horizontal o vertical.
Sol. T.H. en $(3, -3/2)$ y $(-3, 3/2)$
T.V. en $(6, -3/4)$ y $(-6, 3/4)$

15. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^2 - y^2 = 7$ en el punto $(4, -3)$.
Sol. $4x + 3y = 7$; $3x - 4y = 24$.

16. Hallar en qué punto la tangente a la curva $y = x^3 + 5$ es (*a*) paralela a la recta $12x - y = 17$, (*b*) perpendicular a la recta $x + 3y = 2$. *Sol.* (*a*) $(2, 13)$, $(-2, -3)$; (*b*) $(1, 6)$, $(-1, 4)$.

17. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $9x^2 + 16y^2 = 52$ paralelas a la recta $9x - 8y = 1$.
Sol. $9x - 8y = \pm 26$.

18. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $xy = 1$ trazadas desde el punto $(-1, 1)$.
Sol. $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 2\sqrt{2} - 2$; $y = -(2\sqrt{2} + 3)x - 2\sqrt{2} - 2$.

19. Demostrar que la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en un punto de ella $P(x_0, y_0)$ es, $yy_0 = 2p(x + x_0)$.

20. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ de pendiente igual a m son, $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

21. Dada la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que (*a*) la ecuación de la tangente en un punto de ella, $P(x_0, y_0)$, es $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$, (*b*) las ecuaciones de las tangentes de pendiente m son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

22. Demostrar que la normal a una parábola en un punto de ella P_0 es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector de dicho punto y la paralela al eje de la parábola trazada por él.

23. Demostrar que toda tangente a una parábola excepto la del vértice, corta a la directriz y al *latus rectum* (N. del T.: Cuerda perpendicular al eje por el foco) en puntos que equidistan del foco.

24. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a una parábola trazada desde un punto de la directriz, pasa por el foco.

25. Demostrar que la normal a una elipse en un punto de ella P_0 es bisectriz del ángulo que forman los radios vectores de dicho P_0.

26. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a una hipérbola trazada desde un punto de una directriz pasa por el foco correspondiente.

27. Demostrar que el punto de contacto de una tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

28. Demostrar que la pendiente de la tangente a una hipérbola o una elipse en uno de los extremos de su *latus rectum* (*N. del T.*: Cuerda perpendicular al eje—mayor en la elipse y transversal en la hipérbola— por el foco) es numéricamente igual a su excentricidad.

29. Demostrar que (*a*) la suma de las coordenadas en el origen de una tangente cualquiera a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ es constante, (*b*) la suma de los cuadrados de las coordenadas en el origen de una tangente cualquiera a la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, es constante.

30. Hallar los ángulos agudos de intersección de las circunferencias $x^2 - 4x + y^2 = 0$ y $x^2 + y^2 = 8$. *Sol.* 45.°

31. Demostrar que las curvas $y = x^3 + 2$ e $y = 2x^2 + 2$ tienen una tangente común en el punto $(0, 2)$ y que se cortan en el punto $(2, 10)$ formando un ángulo $\phi = \text{arc tag } 4/97$.

32. Demostrar que la elipse $4x^2 + 9y^2 = 45$ y la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 5$ son ortogonales.

33. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, así como las longitudes de subtangentes, subnormal, tangente y normal, a la parábola $y = 4x^2$ en el punto $(-1, 4)$.
Sol. $y + 8x + 4 = 0$, $8y - x - 33 = 0$; $-\frac{1}{2}$, -32, $\frac{1}{2}\sqrt{65}$, $4\sqrt{65}$.

34. Calcular la longitud de subtangente, subnormal, tangente y normal a la hipérbola $3x^2 - 2y^2 = 10$ en el punto $(-2, 1)$.
Sol. $-1/3$, -3, $\sqrt{10}/3$, $\sqrt{10}$.

35. Determinar en qué puntos de la curva $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ sus tangentes pasan por el origen.
Sol. $x = -3$, -1, $3/4$.